カイ二乗分布

2023年版・作成（小鷹研理）

問題設定

男女別の偶数と奇数の好みの集計表

	EVEN	ODD
FEMALE	370	203
MALE	230	197

1. 女性は有意に偶数を好むと結論できるか？
2. 男性は有意に偶数を好むと結論できるか？
3. 女性は男性よりも有意に偶数を好むと結論できるか？

男女別の偶数と奇数の好みの集計表

	EVEN	ODD
FEMALE	370	203
MALE	230	197

1. 女性は有意に偶数を好むと結論できるか？
2. 男性は有意に偶数を好むと結論できるか？

カイ二乗検定：適合度検定

3. 女性は男性よりも有意に偶数を好むと結論できるか？

カイ二乗検定の独立性の検定

	EVEN	ODD
FEMALE	370	203

女性が有意に偶数を好む

↓

（女性の）偶数と奇数の好みがランダムのとき、
370 vs 203 のような偏りが生じることがほとんど無い。

↓

（女性の）偶数と奇数の好みがランダムのとき、
370 vs 203 のような偏りが生じる割合が α 以下である。

α ：有意確率（通常は0.05）

1. 女性は有意に偶数を好むと結論できるか？
2. 男性は有意に偶数を好むと結論できるか？

カイ二乗検定：適合度検定

例題（サイコロ）

```r
# サイコロを60回振った時の各目が以下のようになる。
obs1 = c(5,8,10,20,7,10) #観測事象１
obs2 = c(15,8,14,6,8,9)  #観測事象２

# それぞれの目の出現確率が1/6のとき、期待値は？
expected = c(10,10,10,10,10,10)

# 観測値と期待値が対応するデータフレームを作成します。
dat = data.frame(OBS1 = obs1, OBS2 = obs2, EX = expected)
```

観測事象１と観測事象２を生んだサイコロの出力は、
「有意に偏りがある」と言えるか？を検定する。

期待されるランダム事象からのズレの標準化

カイ二乗値

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

得られた観測度数（カウント数：o_i）が
理論比率（離散確率分布）に基づく期待度数（ e_i ）に
に従って得られたかを調べる検定

期待されるランダム事象からのズレの標準化

カイ二乗値

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

	1	2	3	4	5	6	総和
O：観測事象１	5	8	10	20	7	10	60
E：期待値（ランダム事象）	10	10	10	10	10	10	60
（O - E）^2	(-5)^2	(-2)^2	0^2	10^2	(-3)^2	0^2	138
{（O - E）^2} / E	2.5	0.4	0	10	0.9	0	13.8

```
obs1 = c(5,8,10,20,7,10) #観測事象１
expected = c(10,10,10,10,10,10)
```

期待されるランダム事象からのズレの標準化

カイ二乗値

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

	1	2	3	4	5	6	総和
O：観測事象２	15	8	14	6	8	9	60
E：期待値（ランダム事象）	10	10	10	10	10	10	60
（O - E）^2	5^2	(-2)^2	4^2	(-4)^2	(-2)^2	(-1)^2	66
{（O - E）^2} / E	2.5	0.4	1.6	1.6	0.4	0.1	6.6

```
obs2 = c(15,8,14,6,8,9)  #観測事象２
expected = c(10,10,10,10,10,10)
```

統計量

```
expected = c(10,10,10,10,10,10)
```

$\chi^2 = 13.8$

$\chi^2 = 6.6$

```
obs1 = c(5,8,10,20,7,10)
```

```
obs2 = c(15,8,14,6,8,9)
```

χ^2（カイ二乗値）のような、
観測値の特徴を要約した値のことを
「統計量」と呼びます。

Rによるカイ二乗値の求め方

```
chisq.test ( 観測値ベクトル , p = 期待値の確率分布 ) $statistic
```

pは期待値ではなく確率分布であることに注意！！

```
# 「カイ二乗値」は、Rでは
# chisq.test（観測値ベクトル, p=期待値の確率分布）で求められます。
# 2つ目の引数：期待値の確率分布の総和は1となっている必要があります。
# 今回は, 期待値の確率分布はc(1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6)となるので、
result.OBS1 = chisq.test(dat$OBS1,p = rep(1/6,times=6))
result.OBS1$statistic #返り値の名前属性$statisticがχ^2に対応
#X-squared
#     13.8

#F2についても同様に
result.OBS2 = chisq.test(dat$OBS2,p = rep(1/6,times=6))
result.OBS2$statistic
#X-squared
#       6.6
```

カイ二乗値（χ^2）

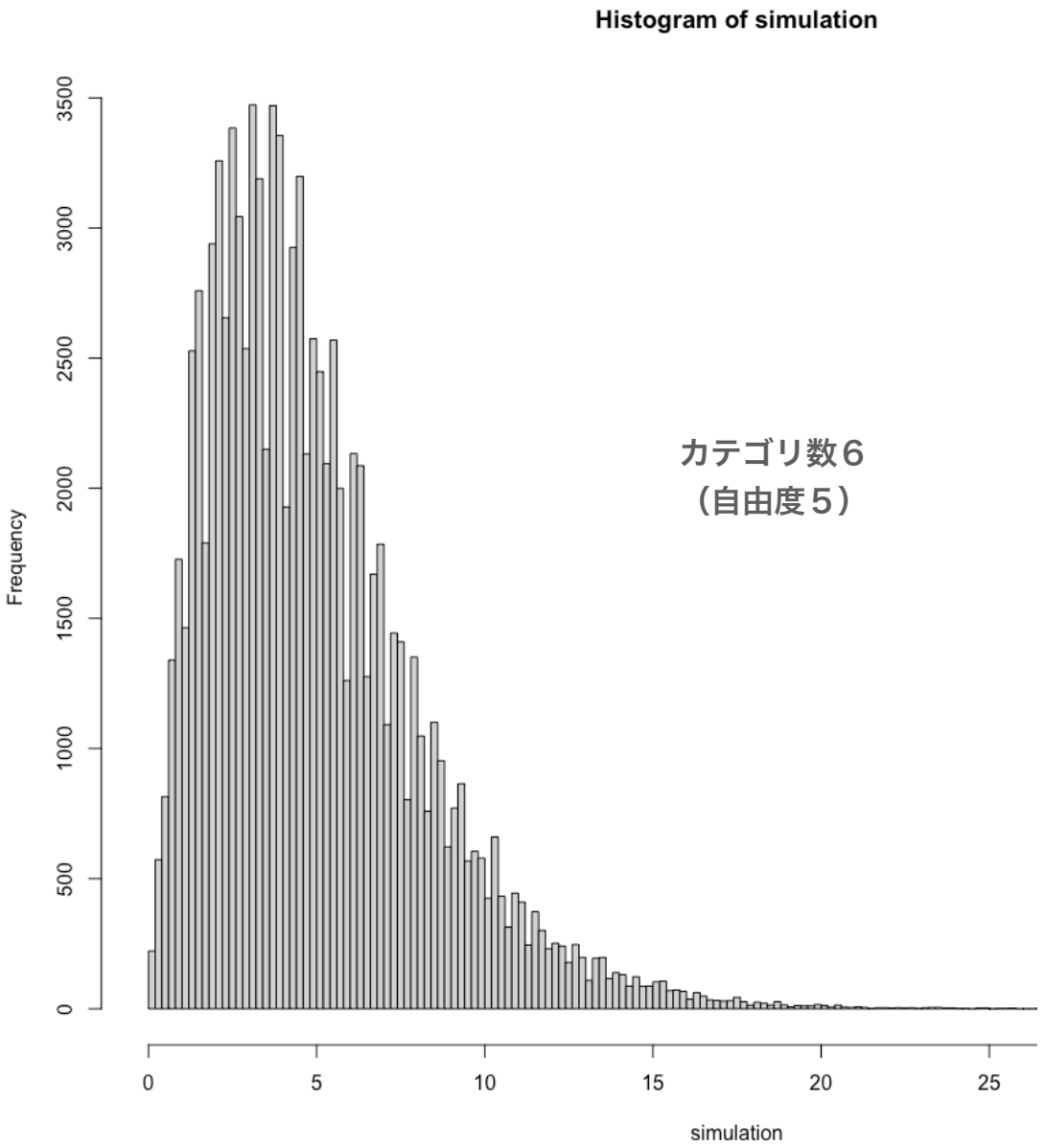
```r
# 同じ操作を1から6まで全て行い加算したものをkai2.OBS1とする
kai2.OBS1 = sum((dat$OBS1 - dat$EX)^2 / dat$EX)
#[1] 13.8

#  （OBS2の場合）
# OBS2に対しても同様に計算する
kai2.OBS2 = sum((dat$OBS2 - dat$EX)^2 / dat$EX)
#[1] 6.6

# このようにして計算される「期待値からのズレの二乗和」を
#  「カイ二乗値（χ^2）」と呼びます。
```

$\chi^2 = 13.8$、$\chi^2 = 6.6$が、
ランダム事象全体の5%以上で生起する水準のものか否かを検定する！！

事象がランダムな場合のカイ二乗分布のシミュレーション

```r
# 60回サイコロを振った時のkai.2を算出する関数

getDiceKai2 = function(){

  # 60回サイコロを振りベクトルに展開します。
  dice.60 = sample(1:6,60,replace=TRUE);

  # 各出目の出現数のベクトルを作ります。
  dice.6 = vector("integer",6)
  for(i in 1:6){
    dice.6[i] = length(which(dice.60==i))
  }
  # 各出目の期待値は
  dice.ex = c(10,10,10,10,10,10)
  # 期待値からのズレの統計量を各出目毎に加算
  sum((dice.6 - dice.ex)^2  / dice.ex);
}
```

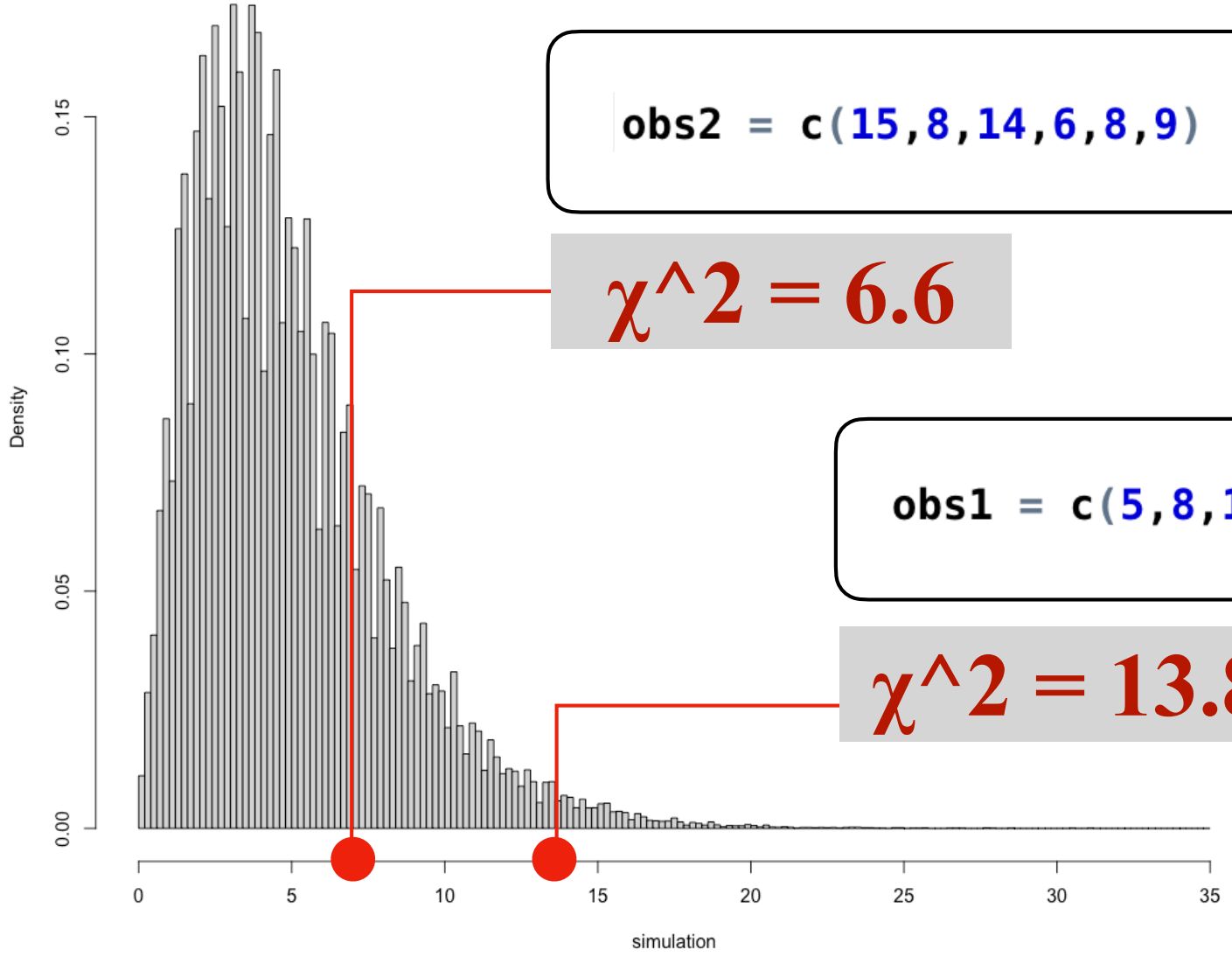
```r
# getDiceKai2()を100000回実行し、
# その統計量を集めます。
simulation = replicate(100000,getDiceKai2())

#最小値・下位25%・中央値・平均・上位25%・最大値
summary(simulation)
#Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
#0.000   2.600   4.400   5.017   6.600  31.200

# ヒストグラムの計算
# X軸は、0から最大値より大きな値（35）まで,
# 0.2刻みでベクトルを計算
h = hist(simulation,breaks = seq(0,35,by=0.2))
```



カテゴリ数６
（自由度５）

事象がランダムな場合のカイ二乗分布のシミュレーション

```
# hist関数はデフォルトでは頻度を縦軸に出力
# 縦軸を確率密度にするには、引数でfreq=FALSEを指定
h = hist(simulation,breaks = seq(0,35,by=0.2),freq=FALSE)
```



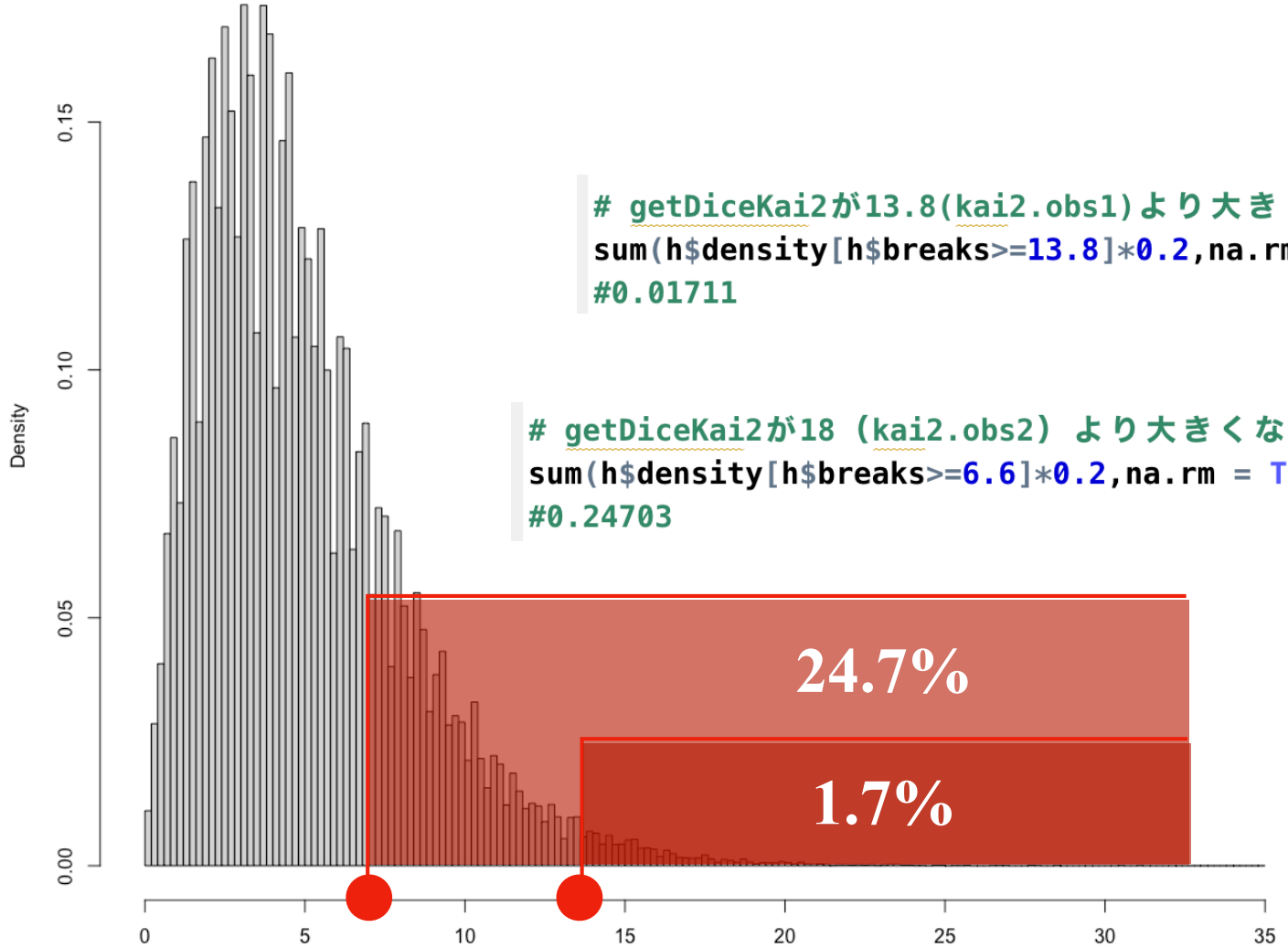

```
obs2 = c(15,8,14,6,8,9)
```

$\chi^2 = 6.6$

```
obs1 = c(5,8,10,20,7,10)
```

$\chi^2 = 13.8$

事象がランダムな場合のカイ二乗分布のシミュレーション




```r
# getDiceKai2が13.8(kai2.obs1)より大きくなる確率は？
sum(h$density[h$breaks>=13.8]*0.2,na.rm = T)#NAを無視
#0.01711
```

```r
# getDiceKai2が18（kai2.obs2）より大きくなる確率は？
sum(h$density[h$breaks>=6.6]*0.2,na.rm = T) #NAを無視
#0.24703
```

それ以上の偏りが生じる割合は
0.24（p値）→ 有意差なし

それ以上の偏りが生じる割合は0.017（p値）
→ 有意差あり

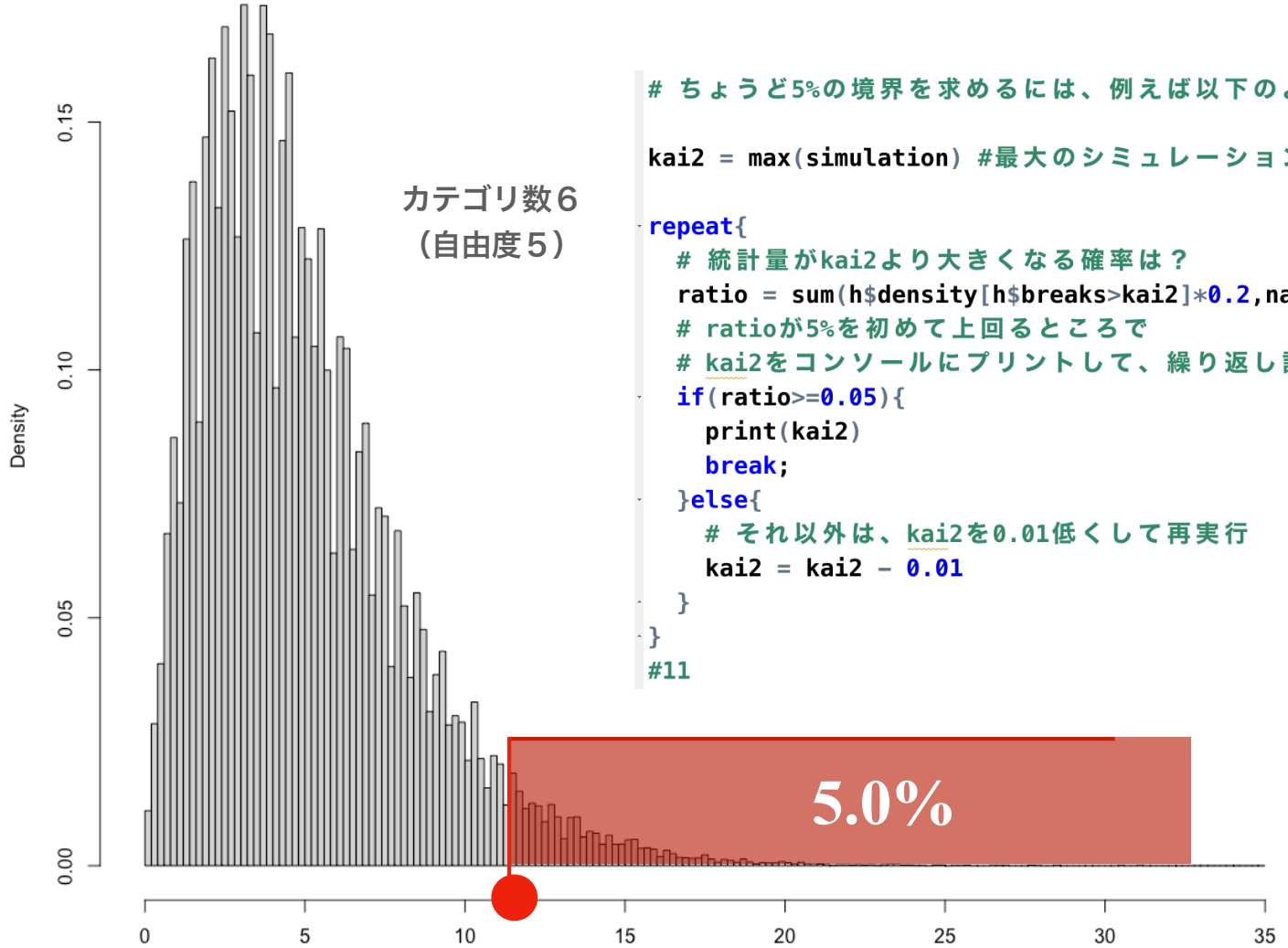
Rによる「p値」の求め方

```
chisq.test ( 観測値ベクトル , p = 期待値の確率分布 ) $p.value
```

pは期待値ではなく確率分布であることに注意！！

```
# このような確率を「p値」と呼ぶ。
# 「p値」もまた、Rの「chisq.test」で正確な値を自動的に算出できる。

result.F1 = chisq.test(dat$F1,p = rep(1/6,times=6))
result.F1$p.value
#[1] 0.01693102
# 0.01711でうまく近似できていたことがわかる

result.F2 = chisq.test(dat$F2,p = rep(1/6,times=6))
result.F2$p.value
#[1] 0.2521282
#0.24703でうまく近似できていたことがわかる
```

事象がランダムな場合のカイ二乗分布のシミュレーション



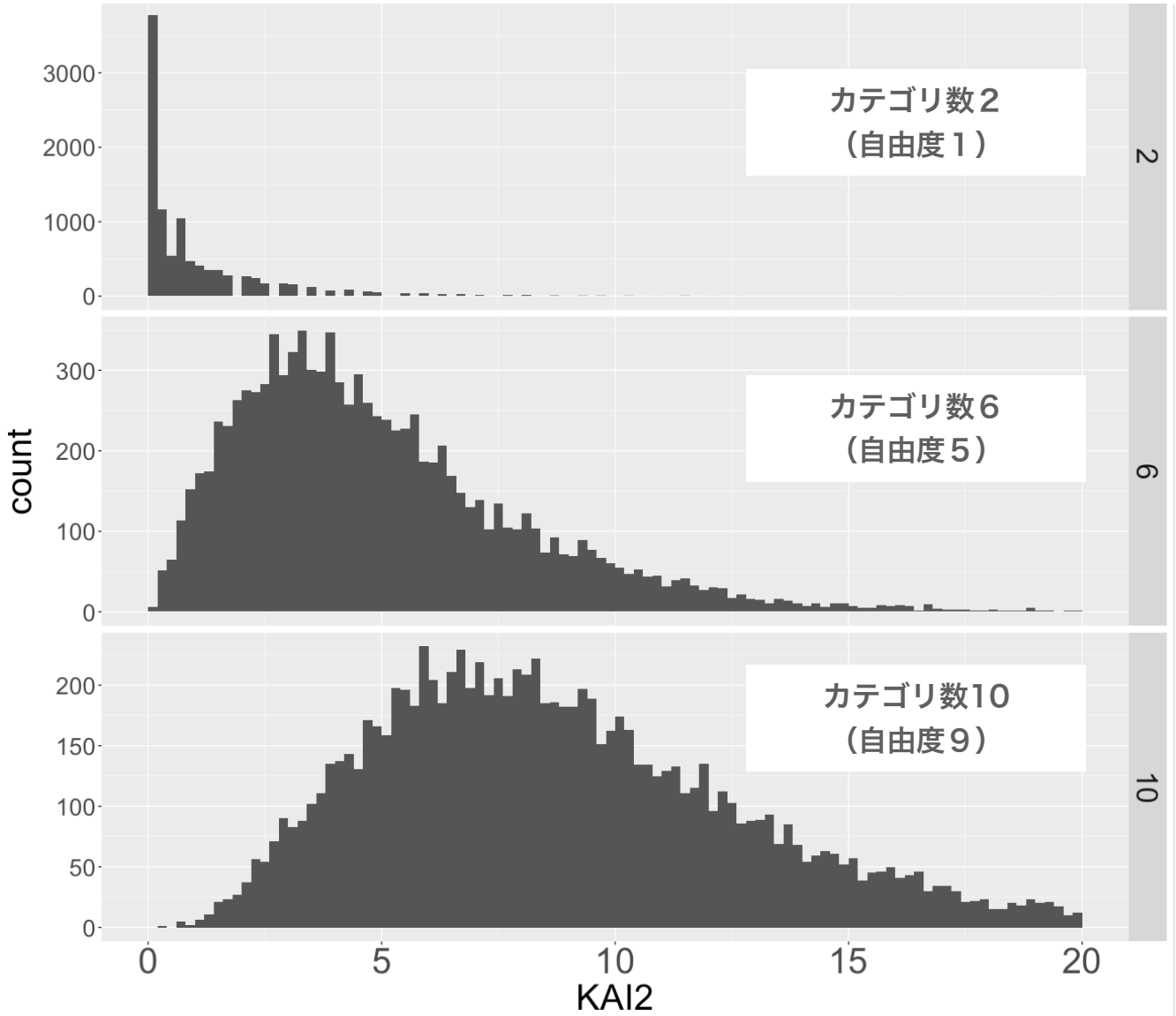
カテゴリ数６
（自由度５）

```r
# ちょうど5%の境界を求めるには、例えば以下のようにする

kai2 = max(simulation) #最大のシミュレーション値から始める。

repeat{
  # 統計量がkai2より大きくなる確率は？
  ratio = sum(h$density[h$breaks>kai2]*0.2,na.rm = T)
  # ratioが5%を初めて上回るところで
  # kai2をコンソールにプリントして、繰り返し計算を終了
  if(ratio>=0.05){
    print(kai2)
    break;
  }else{
    # それ以外は、kai2を0.01低くして再実行
    kai2 = kai2 - 0.01
  }
}
#11
```

これ以上のχ二乗値をとるとき、対応する観測値は有意な偏りを有していると検定される。

カテゴリ数（自由度）が異なるカイ二乗分布

カテゴリ数が増えると、カイ二乗分布のピークはカテゴリ数付近へと移動します。



1. 女性は有意に偶数を好むと結論できるか？
2. 男性は有意に偶数を好むと結論できるか？

カイ二乗検定：適合度検定

1.女性は有意に偶数を好むと結論できるか？
2.男性は有意に偶数を好むと結論できるか？

カイ二乗検定：適合度検定

FEMALE

	EVEN	ODD	総和
O：観測事象１	370	203	573
E：期待値（ランダム事象）	286.5	286.5	573
（O - E）^2	(83.5)^2	(-83.5)^2	13944.5
{（O - E）^2} / E	24.34	24.34	48.7

MALE

EVEN	ODD	総和
230	197	427
213.5	213.5	427
(16.5)^2	(-16.5)^2	544.5
1.28	1.28	2.55

```
result = chisq.test(c(370,203),p = c(0.5,0.5))
result$statistic
#X-squared          result$p.value
# 48.6719           #[1] 3.025703e-12
```

```
result = chisq.test(c(230,197),p = c(0.5,0.5))
result$statistic #統計量は2.55
# X-squared        result$p.value #p値>0.11
# 2.550351         # [1] 0.1102697
```

χ^2 = 48.7, p値 = 0.00000000000030

↓

有意差あり

χ^2 = 2.55, p値 = 0.11

↓

有意差なし

3.女性は男性よりも有意に偶数を好むと結論できるか？

カイ二乗検定の独立性の検定

	EVEN	ODD
FEMALE	370	203
MALE	230	197

帰無仮説を検証し、これが否定されたときに
限って、対立仮説が採用される。

帰無仮説

女性と男性との間に好みの差は存在しない。

＝

観測された事象は、ランダム過程
~~（50%-50%）~~ で生じる範囲の差に過ぎない。

↕

対立仮説

女性と男性との間に好みの偏りは存在する。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2((r-1)(c-1))$$

r	Aのカテゴリの数
c	Bのカテゴリの数
$\Phi = (r-1)(c-1)$	自由度
O_{ij}	観測度数
E_{ij}	期待度数

実際に出た回数

「AとBが独立」
という仮説の下で
期待される回数

https://atarimae.biz/archives/13850

観測度数（O）	女性	男性	総和
EVEN	370	230	600
ODD	203	197	400
総和	573	427	1000

期待度数（E）	女性	男性	総和
EVEN	343.8 (573*0.6)	256.2 (427*0.6)	600
ODD	229.2 (573*0.4)	170.8 (427*0.4)	400
総和	573	427	1000

$\frac{(O-E)^2}{E}$	女性	男性	総和
女性	$\frac{(370-343.8)^2}{343.8}$ (2.00)	$\frac{(230-256.2)^2}{256.2}$ (2.68)	4.68
男性	$\frac{(203-229.2)^2}{229.2}$ (2.99)	$\frac{(197-170.8)^2}{170.8}$ (4.01)	7.0
総和	4.99	6.69	11.68

Rによる「χ二乗値」「p値」の求め方

```
chisq.test ( 観測ベクトル１[男女] , 観測ベクトル２[好み], correct = F) $statistics
```

```
chisq.test ( 観測ベクトル１[男女] , 観測ベクトル２[好み] , correct = F) $p.value
```

```
# ちなみに、chisq.testを使うと、正確なカイ二乗分布を使った
#  （近似ではない）p値がわかる。
result = chisq.test(expdat$gender, expdat$preference, correct=F)
#X-squared = 11.69, df = 1, p-value = 0.0006284

result$p.value
#0.0006284205
```